

Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Ada suatu konsep yang paralel dengan konsep faktor persekutuan terbesar (FPB), yang dikenal faktor persekutuan terkecil (KPK). Suatu bilangan bulat c disebut kelipatan persekutuan dari bilangan-bilangan bulat tak nol a dan b jika $a \mid c$ dan $b \mid c$. Hal ini berarti pula nol adalah kelipatan persekutuan dari a dan b . Perlu diingat pula bahwa ab dan $-(ab)$ adalah kelipatan persekutuan dari a dan b , dan salah satunya positif. Dengan menggunakan prinsip terurut sempurna (*well ordering principle*), himpunan kelipatan persekutuan dari a dan b harus sebuah bilangan bulat terkecil; kita menyebutnya kelipatan persekutuan terkecil dari a dan b , dan ditulis $KPK(a, b)$.

Definisi

Kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan bulat tak nol a dan b , dilambangkan $KPK(a, b)$, adalah bilangan positif m yang memenuhi:

- (i) $a \mid m$ dan $b \mid m$.
- (ii) Jika $a \mid c$ dan $b \mid c$ dengan $c > 0$ maka $m \leq c$.

Sebagai ilustrasi, kelipatan persekutuan positif dari -12 dan 30 adalah $60, 120, 180, \dots$. Dengan demikian, $KPK(-12, 30) = 60$.

Dari diskusi terdahulu, kita dapat secara jelas menyatakan bahwa jika diberikan dua bilangan tak nol a dan b maka $KPK(a, b)$ selalu ada, dan $KPK(a, b) \leq |ab|$. Selanjutnya, bagaimana hubungan antara KPK dan FPB? Berikut ini sifat yang menjelaskan hubungan antara keduanya.

Sifat 1

Untuk bilangan-bilangan bulat positif a dan b , berlaku

$$FPB(a, b) \cdot KPK(a, b) = ab$$

Bukti

Misalkan $d = FPB(a, b)$ dan kita tulis $a = dr$, $b = ds$ untuk bilangan-bilangan bulat r dan s . Jika $m = ab/d$ maka $m = as = rb$. Akibatnya adalah m (positif) adalah suatu kelipatan persekutuan a dan b .

Sekarang misalkan c adalah sebarang bilangan bulat positif yang merupakan kelipatan persekutuan a dan b . $c = au = bv$. Sebagaimana kita ketahui, ada bilangan-bilangan bulat x dan y yang memenuhi $d = ax + by$. Konsekuensinya,

$$c/m = cd/ab = (c(ax + by))/ab = (c/b)x + (c/a)y = vx + uy$$

Persamaan ini menyatakan bahwa $m \mid c$, dan kita dapat menyimpulkan bahwa $m \leq c$. Dengan demikian, $m = \text{KPK}(a, b)$; Hal ini berarti bahwa

$$\text{KPK}(a, b) = ab/d = ab/\text{FPB}(a, b)$$

Sifat 2

Untuk suatu bilangan-bilangan bulat positif a dan b , $\text{KPK}(a, b) = ab$ jika dan hanya jika $\text{FPB}(a, b) = 1$.

Sifat 2 ini hanya merupakan akibat langsung dari sifat 1.

Sebagai ilustrasi, Karena $\text{FPB}(3054, 12378) = 6$, kita dapat dengan cepat memperoleh $\text{KPK}(3054, 12378)$, yaitu:

$$\begin{aligned}\text{KPK}(3054, 12378) &= 3054 \cdot 12378 / \text{FPB}(3054, 12378) \\ &= 3054 \cdot 12378 / 6 \\ &= 6300402.\end{aligned}$$

Perlu diketahui pula bahwa faktor persekutuan terbesar dapat diperluas untuk lebih dari dua bilangan bulat. Dalam kasus tiga buah bilangan bulat, a, b, c tak nol, $\text{FPB}(a, b, c)$ didefinisikan sebagai suatu bilangan bulat positif d yang memenuhi:

- (i) d adalah faktor dari setiap a, b, c .
- (ii) Jika e faktor dari a, b, c , maka $e \leq d$.

Sebagai ilustrasi, perhatikan bahwa

$$\text{FPB}(39, 42, 54) = 3 \text{ dan } \text{FPB}(49, 210, 350) = 1$$

Seperti pada FPB, ada beberapa metode untuk menentukan KPK dari dua buah bilangan yang diberikan, yaitu:

1. Metode Irisan Himpunan.

Di dalam metode irisan himpunan, pertama kita tentukan himpunan kelipatan-kelipatan positif dari bilangan pertama dan bilangan kedua, kemudian kita tentukan himpunan persekutuan kelipatan dari bilangan-bilangan itu, dan akhirnya kita pilih bilangan terkecil dari himpunan itu.

Contoh 1.

Tentukan KPK dari 8 dan 12.

Jawab.

Misalkan himpunan-himpunan kelipatan positif dari 8 dan 12 berturut-turut adalah K_8 dan K_{12} .

$$\begin{aligned}K_8 &= \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, \dots\} \\ K_{12} &= \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, \dots\}\end{aligned}$$

Himpunan kelipatan persekutuannya adalah

$$K8 \cap K12 = \{24, 48, 72, \dots\}$$

Karena bilangan terkecil dari $K8 \cap K12$ adalah 24, KPK dari 8 dan 12 adalah 24, ditulis $KPK(8, 12) = 24$.

Contoh 2.

Tentukan KPK dari 40, 60, dan 80.

Jawab.

Misalkan himpunan-himpunan kelipatan positif dari 40, 60, dan 80 berturut-turut adalah $K40$, $K60$, dan $K80$.

$$K40 = \{40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400, 440, 480, \dots\}$$

$$K60 = \{60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, \dots\}$$

$$K80 = \{80, 160, 240, 320, 400, 480, \dots\}$$

Himpunan kelipatan persekutuannya adalah

$$K8 \cap K12 = \{240, 480, 720, \dots\}$$

Karena bilangan terkecil dari $K40 \cap K60 \cap K80$ adalah 240, KPK dari 40, 60, dan 80 adalah 240 dan ditulis,

$$KPK(40, 60, 80) = 240.$$

2. Metode Faktorisasi Prima.

Metode irisan himpunan untuk menentukan KPK sering kali terlalu panjang, khususnya ketika digunakan untuk menentukan KPK dari tiga atau lebih bilangan-bilangan asli. Metode lain, yang mungkin lebih efisien, untuk menentukan KPK dari beberapa bilangan adalah metode faktorisasi prima.

Contoh 3.

Tentukan $KPK(40, 12)$.

Jawab.

Faktorisasi prima dari 40 dan 12, yaitu:

$$40 = 2^3 \times 5$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

Jika $m = KPK(40, 12)$, maka m adalah sebuah kelipatan dari 40, dan ini harus memuat 2^3 dan 5 sebagai faktornya. Juga, m adalah kelipatan 12, dan ini harus memuat 2^2 dan 3 sebagai faktornya.

Karena 2^3 adalah kelipatan dari 2^2 , maka $m = 2^3 \times 5 \times 3 = 120$.

Contoh 4.

Tentukan KPK dari 2520 dan 10530.

Jawab.

$$\text{Karena } 2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \text{ dan}$$

$$10530 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 13$$

$$\text{KPK } (2520, 10530) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$$

3. Algoritma Euclide

Untuk menentukan KPK(a, b) dengan cara ini, kita memanfaatkan pengetahuan kita tentang algoritma Euclide untuk menentukan FPB(a, b) dan hubungan antara KPK dan FPB, yaitu $\text{FPB}(a, b) \cdot \text{KPK}(a, b) = ab$ untuk bilangan-bilangan bulat positif a dan b.

Cara ini sangat berguna untuk mencari KPK dari dua buah bilangan a dan b jika dengan faktorisasi prima tidak mudah untuk ditentukan. FPB (a, b)-nya.

Contoh 5.

Tentukan KPK (731, 952).

Jawab.

Dengan menggunakan algoritma Euclide, diperoleh

$$\text{FPB}(731, 952) = 17.$$

Dengan sifat 1, diperoleh

$$\begin{aligned} \text{KPK } (731, 952) &= (731 \cdot 952) / 17 \\ &= 40936. \end{aligned}$$

4. Metode Pembagian dengan Bilangan Prima

Metode lain untuk menentukan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari beberapa bilangan asli adalah menggunakan pembagian dengan bilangan prima. Metode ini mulai dengan bilangan prima terkecil yang dapat membagi paling sedikit satu dari bilangan yang diberikan, kemudian proses pembagian ini dilanjutkan sampai baris di mana jawabannya berisi bilangan-bilangan 1.

Contoh 6.

Tentukan KPK (12, 75, 120)

Jawab.

Untuk menyelesaikan masalah ini, kita mulai dengan bilangan prima terkecil yang dapat membagi paling sedikit satu dari bilangan yang diberikan dan membaginya sebagai berikut:

$$\begin{array}{r} 2 \mid 12, 75, 120 \\ \hline 6, 75, 60 \end{array}$$

Karena 2 tidak habis membagi 75, tulis kembali 75 di bawah. Untuk memperoleh KPK dengan menggunakan prosedur ini, kita teruskan proses pembagian ini sampai baris di mana jawabannya berisi bilangan-bilangan 1.

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 12, 75, 120} \\
 2 \overline{) 6, 75, 60} \\
 2 \overline{) 3, 75, 30} \\
 3 \overline{) 3, 75, 15} \\
 5 \overline{) 1, 25, 5} \\
 5 \overline{) 1, 5, 1} \\
 \hline
 1, 1, 1
 \end{array}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
 \text{KPK}(12, 75, 120) &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \\
 &= 2^3 \times 3 \times 5^2 = 600.
 \end{aligned}$$

Rangkuman

- Kelipatan persekutuan terkecil dari dua bilangan bulat tak nol a dan b , dilambangkan $\text{KPK}(a, b)$, adalah bilangan positif m yang memenuhi:
 - $a \mid m$ dan $b \mid m$.
 - Jika $a \mid c$ dan $b \mid c$ dengan $c > 0$ maka $m \leq c$.
- Untuk bilangan-bilangan bulat positif a dan b , berlaku $\text{FPB}(a, b) \cdot \text{KPK}(a, b) = ab$.
- Untuk suatu bilangan-bilangan bulat positif a dan b , $\text{KPK}(a, b) = ab$ jika dan hanya jika $\text{FPB}(a, b) = 1$.
- Beberapa metode untuk menentukan $\text{KPK}(a, b)$ yaitu: metode irisan himpunan, metode faktorisasi prima, algoritma Euclide, dan metode pembagian dengan bilangan prima.

Uji Kompetensi

Lingkarilah salah satu jawaban yang menurut anda benar.

- $\text{KPK}(24, 36) =$
 - 36
 - 72
 - 48
 - 96
- $\text{KPK}(90, 105, 315) =$

- a. 630
 - b. 480
 - c. 960
 - d. 230
3. KPK (132 , 504)
- a. 5544
 - b. 2990
 - c. 1946
 - d. 3892
4. Pada sebuah ruangan ada tiga buah jam alarm yang disetel secara berbeda. Jam alarm A berbunyi setiap 15 menit, jam alarm B berbunyi setiap 40 menit, dan jam alarm C berbunyi setiap 60 menit. Jika semua jam itu berbunyi pada jam 06.00. Berapa lama ketiga jam alarm tersebut berbunyi bersam-sama lagi setelah jam 06.00 tersebut?
- a. 08.00
 - b. 08.30
 - c. 09.00
 - d. 09.30
5. Jika sebuah bilangan lebih besar dari FPB (9 , 12), lebih kecil dari KPK (2 , 3) dan bilangan tersebut adalah ganjil maka bilangan tersebut adalah:
- a. 3
 - b. 5
 - c. 7
 - d. 9
6. Misalkan a dan b bilangan-bilangan asli. Jika $\text{FPB}(a, b) = 1$ maka $\text{KPK}(a, b) = \dots$
- a. 1
 - b. a
 - c. ab
 - d. tidak dapat ditentukan
7. $\text{KPK}(n, n^2) =$
- a. 1
 - b. n
 - c. n^2
 - d. n^3
8. Jika $\text{KPK}(m, n) = n$ maka

- a. $m < n$
- b. $m \leq n$
- c. $m = n$
- d. pilihan jawaban a, b, dan c salah.

9. Jika $KPK(m, n) = p$ maka

- a. $m < p$
- b. $m \leq p$
- c. $m = p$
- d. pilihan jawaban a, b, dan c salah.

10. Jika $KPK(m, n) = p$ dan $FPB(m, n) = q$ maka

- a. $q < p$
- b. $p < q$
- c. $p \leq q$
- d. pilihan jawaban a, b, dan c salah.

11. Jika $a \mid b$ maka $KPK(a, b) =$

- a. a
- b. b
- c. $|a|$
- d. $|b|$

12. Jika $KPK(a, b) = FPB(a, b)$ maka

- a. $a = b$
- b. $a = kb$ untuk suatu k bilangan bulat
- c. $b = ka$ untuk suatu k bilangan bulat
- d. $a = b$ atau $a = -b$